

Analízis jegyzet

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Valós számok	5
1.1. Cantor-féle közöspont tétel	5
1.2. Dedekind axióma	5
1.3. Alulról korlátos halmaz	5
1.4. Felülről korlátos halmaz	5
1.5. Korlátos halmaz	5
1.6. Infimum	6
1.7. Tétel	6
1.8. Szuprémum	6
1.9. Tétel	6
1.10. Belső pont	6
1.11. Külső pont	7
1.12. Határpont	7
1.13. Nyílt halmaz	7
1.14. Zárt halmaz	7
1.15. Lezárási pont	7
1.16. Torlódási pont	7
1.17. Halmaz lezártja	7
1.18. Háromszög egyenlőtlenség	8
1.19. Bernoulli-egyenlőtlenség	8
1.20. Számítási és mértani közép közti egyenlőtlenség	8
2. Sorozatok, végtelen sorok	11
2.1. Sorozat	11
2.2. Korlátos sorozat	11
2.3. Monoton sorozat	11
2.4. Konvergens sorozat	11
2.5. Divergens sorozat	11
2.6. Végtelenbe divergálás	11
2.7. Általános határérték	11
2.8. Tétel	12
2.9. Tétel	12

2.10. Határértékek tulajdonságai	12
2.11. Részsorozat	14
2.12. Tétel	14
2.13. Csúcselem	14
2.14. Tétel	14
2.15. Bolzano-Weierstrass tétel	14
2.16. Nullsorozat	14
2.17. Tétel	15
2.18. Összehasonlító kritériumok	15
2.19. Nagyságrendek	15
2.20. Cauchy kritérium	16
2.21. Tétel	16
2.22. Torlódási pont	16
2.23. Limesz inferior	17
2.24. Limesz superior	17
2.25. Tétel	17
2.26. Tétel	17
2.27. Számtani átlag sorozat	17
2.28. Tétel	17
2.29. Tétel	18
2.30. Végtelen sor	18
2.31. N-edik részletösszeg	18
2.32. Tétel	18
2.33. Divergencia-teszt	18
2.34. Mértani sor	19
2.35. Cauchy kritérium végtelen sorokra	19
2.36. Tétel	19
2.37. Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra	19
2.38. Abszolút konvergencia	19
2.39. Tétel	19
2.40. Feltételes konvergencia	20
2.41. Hányados-kritérium (d'Alembert féle)	20
2.42. Gyenge hányados-kritérium	21
2.43. Gyökkritérium (Cauchy féle)	21
2.44. Gyenge gyökkritérium	22
2.45. Leibniz-típusú sor	22
2.46. Tétel	22
2.47. Tétel	23
2.48. Riemann tétel	23
3. Valós függvények	24
3.1. Függvény	24
3.2. Értelmezési tartomány	24
3.3. Értékkészlet	24

3.4. Injektív függvény	24
3.5. Szürjektív függvény	24
3.6. Bijektív függvény	24
3.7. Inverz függvény	24
3.8. Tétel	24
3.9. Függvénykompozíció	24
3.10. Folytonosság pontban	25
3.11. Sorozatfolytonosság pontban	25
3.12. Tétel	25
3.13. Folytonosság intervallumon	25
3.14. Folytonosság tulajdonságai	26
3.15. Függvények határértéke	26
3.16. Átviteli elv függvények határértékére	27
3.17. Egyoldali határérték	28
3.18. Tétel	29
3.19. Átviteli elv egyoldali határértékekre	29
3.20. Szakadások	29
3.21. Tétel	29
3.22. Határértékek tulajdonságai	30
3.23. Darboux-tulajdonság	31
3.24. Tétel	31
3.25. Bolzano-tétel	31
3.26. Bolzano-Darboux-tétel	32
3.27. Darboux-tétel	32
3.28. Weierstrass tétel	32
3.29. Nevezetes határértékek	33
3.30. Egyenletes folytonosság	34
3.31. Tétel	34
3.32. Heine-tétel	34
3.33. Lipschitz-folytonosság	34
3.34. Tétel	35
3.35. Differenciahányados	35
3.36. Differenciálhányados	35
3.37. Egyoldali derivált	35
3.38. Tétel	35
3.39. Differenciálhatóság intervallumon	35
3.40. Tétel	36
3.41. Differenciálási szabályok	36
3.42. Lokális szélsőérték	37
3.43. Globális szélsőérték	37
3.44. Tétel	37
3.45. Középérték tételek	38
3.46. Tétel	38

3.47. Integrálszámítás első alaptétele	38
3.48. L'Hospital-szabály	38
3.49. Tétel	39
3.50. Tétel	39
3.51. Konvexitás	39
3.52. Tétel	39
3.53. Inflexiós pont	39
3.54. Tétel	39
3.55. Elsőfokú Taylor-polinom	39
3.56. Tétel	40
3.57. Tétel	40
3.58. Taylor-polinom	40
3.59. Tétel	40
3.60. Lagrange-féle maradéktag	40
3.61. Tétel	40
4. Integrálszámítás	41
4.1. Primitív függvény	41
4.2. Tétel	41
4.3. Határozatlan integrál	41
4.4. Határozatlan integrál tulajdonságai	41
4.5. Felosztás	42
4.6. Felosztás finomsága	42
4.7. Alsó közelítő összeg	42
4.8. Felső közelítő összeg	42
4.9. Tétel	42
4.10. Riemann-integrál	43
4.11. Oszcillációs összeg	43
4.12. Riemann-összeg	43
4.13. Tétel	43
4.14. Tétel	43
4.15. Tétel	44
4.16. Tétel	44
4.17. Newton-Leibniz-formula	44

1. Valós számok

1.1. Cantor-féle közöspont tétel

Adottak az $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \subset \mathbb{R}$ egymásba skatulyázott, zárt intervallumok, melyekre

$$I_n \subset I_{n+1}.$$

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$, akkor $\exists! x \in \mathbb{R}$ amire $x \in I_n \quad \forall n$ esetén.

Bizonyítás

Indirekten bizonyítunk. Tegyük fel ugyanis, hogy két ilyen szám van, azaz legyen $x, y \in I_n \quad \forall n$ esetén. Legyen $x - y = \delta$. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$ ezért $|I_n| < \delta$ tud teljesülni. Ez viszont ellentmond azzal, hogy $x, y \in I_n \quad \forall n$ esetén.

1.2. Dedekind axióma

Legyen

$$\mathbb{Q} = A \cup B$$

ahol $A \cap B = \emptyset$. Legyen továbbá $\forall a \in A$ és $\forall b \in B$ esetén $a < b$. Ekkor $\exists x \in \mathbb{R}$, hogy $\forall a \in A$ -ra és $\forall b \in B$ -re

$$a \leq x$$

és

$$x \leq b$$

teljesül.

1.3. Alulról korlátos halmaz

Adott $H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, melyre

$$k \leq x \quad \forall x \in H.$$

1.4. Felülről korlátos halmaz

Adott H halmaz felülről korlátos, ha $\exists K$, melyre

$$K \geq x \quad \forall x \in H.$$

1.5. Korlátos halmaz

Adott H halmaz korlátos, alulról és felülről is korlátos, azaz $\exists K \in \mathbb{R}$, amire

$$K \geq |x| \quad \forall x \in H.$$

1.6. Infimum

Adott H alulról korlátos halmaz. Ekkor a legnagyobb alsó korlát a halmaz infimuma, $\inf(H)$.

1.7. Tétel

Adott H alulról korlátos halmaz esetén létezik $\inf(H)$.

Bizonyítás

Legyen a_1 az alsó korlát. Ha $a_1 \in H$ akkor kész vagyunk. Tehát legyen $a_1 \notin H$, és legyen $b_1 \in H$ egy tetszőleges elem, ahol $b_1 > a_1$. Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$ számot.

Ha c_1 alsó korlát, akkor legyen $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$. Ha c_1 nem alsó korlát, akkor legyen $a_2 := a_1$ és $b_2 := c_1$. Legyen továbbá $I_2 = [a_2, b_2]$.

Ezt a lépést a végtelenségig ismételve egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumrendszert kapunk, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$, hiszen minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Tehát a Cantor-féle közöspont tétel miatt létezik egy darab közös pont. Ez a közös pont nagyobb vagy egyenlő, mint az a_k számok, tehát biztosan alsó korlát. Továbbá kisebb vagy egyenlő az összes b_k számnál, így nincs nála nagyobb alsó korlát. Tehát valóban létezik infimum.

1.8. Szuprémum

Adott H felülről korlátos halmaz. Ekkor a legkisebb felső korlát a halmaz szuprémuma, $\sup(H)$.

1.9. Tétel

Adott H felülről korlátos halmaz esetén létezik $\sup(H)$.

Bizonyítás

Az 1.7. analógiájára.

1.10. Belső pont

Adott H halmaz belső pontja $x_0 \in \mathbb{R}$, ha $\exists \epsilon > 0$ amire

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset H.$$

A belső pontok halmaza az $\text{int}(H)$.

1.11. Külső pont

Adott H halmaz külső pontja x_0 , ha $\exists \epsilon > 0$ amire

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap H \neq \emptyset.$$

A külső pontok halmaza az $\text{ext}(H)$.

1.12. Határpont

Adott H halmaz határpontja x_0 , ha $\forall \epsilon > 0$

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap H \neq \emptyset$$

és

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap H^C \neq \emptyset$$

ahol H^C a H halmaz komplementere. A határpontok halmaza a ∂H .

1.13. Nyílt halmaz

Adott H halmaz nyílt, ha $\forall x_0 \in H \quad x_0 \in \text{int}(H)$.

1.14. Zárt halmaz

Adott H halmaz zárt, ha $\partial H \subset H$.

1.15. Lezárási pont

Adott H halmaz lezárási pontja $x_0 \in H$, ha $\forall \epsilon > 0$ esetén

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap H \neq \emptyset.$$

1.16. Torlódási pont

Adott H halmaz torlódási pontja $x_0 \in H$, ha $\forall \epsilon > 0$ esetén

$$(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap H$$

tartalmaz legalább egy x_0 -tól különböző H -beli elemet.

1.17. Halmaz lezártja

Adott H halmaz lezártja tartalmazza H összes lezárási pontját, azaz a legkisebb olyan halmaz, mely tartalmazza H -t, és H összes torlódási pontját. Fennáll továbbá, hogy

$$\overline{H} = H \cup \partial H$$

ahol $\overline{H}$ a H halmaz lezártja.

1.18. Háromszög egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

Bizonyítás

Teljes indukcióval könnyen látható. Ugyanis $n = 2$ -re triviális, hiszen

$$\pm a_1 \leq |a_1| \quad \pm a_2 \leq |a_2|$$

így ezeket összegezve

$$\pm(a_1 + a_2) \leq |a_1| + |a_2|$$

amiből $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.

Tegyük fel, hogy valamilyen n -re teljesül az állítás! Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1} |a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_{n+1}| \geq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}| \geq \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right|$$

Ezzel beláttuk az állítást.

1.19. Bernoulli-egyenlőtlenség

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $h \in \mathbb{R}$, ekkor

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn.$$

Egyenlőség, ha $h = 0$, $n = 0$ vagy $n = 1$.

Bizonyítás

Látható, hogyha $h = 0$ vagy $n = 0$, akkor teljesül az egyenlőség. Legyen tehát $h \neq 0$, és alkalmazzunk teljes indukciót! $n = 1$ -re triviális az egyenlőség. Tegyük fel, hogy teljesül valamilyen n -re az állítás! Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)^n \cdot (1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h) = 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$$

Ezzel beláttuk az állítást.

1.20. Számítási és mértani közép közti egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

Bizonyítás

Először egy gyengébb állítást fogunk bebizonyítani.

Legyen $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, és legyenek az $x_k \geq 0 \in \mathbb{R}$ ahol $k = 1, 2, \dots, n$ olyan számok, amelyek között van legalább kettő különböző és

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1.$$

Ekkor

$$\prod_{k=1}^n x_k < 1.$$

Alkalmazzunk teljes indukciót! $n = 2$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy valamilyen n -re teljesül az állítás! Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

Tekintsük az x_k számokat, ahol $k = 1, 2, \dots, n + 1$ és legyen $x_k := 1 + t_k$. Legyen továbbá az x_k számok számtani közepe 1. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{k=1}^{n+1} t_k = 0$, azaz van köztük pozitív és negatív is, hiszen nem mind egyforma. Az általánosság sérülése nélkül feltehetjük, hogy $t_n < 0 < t_{n+1}$. Legyen ekkor $x_n^* = 1 + t_n + t_{n+1} > 1 + t_n + t_{n+1} + t_n t_{n+1} = x_n \cdot x_{n+1}$. Ekkor azt látjuk, hogy

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n^* = \sum_{k=1}^{n-1} 1 + t_i + 1 + t_n + t_{n+1} = n + \sum_{k=1}^{n+1} t_k = n$$

azaz az $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^*$ számtani átlaga 1 és nem mind egyforma. Ekkor az indukciós feltevés miatt a szorzatok valóban kisebb, mint 1.

Könnyen látható, hogyha az összes x_k szám egyenlő, akkor $x_k = 1$, így a szorzatok is 1. Tehát megfogalmazhatjuk, hogy tetszőleges $x_k \geq 0$ számokra ahol $k = 1, 2, \dots, n$, és

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1$$

teljesül, akkor

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq 1.$$

Legyenek adottak az a_k számok, ahol $k = 1, 2, \dots, n$. Legyen továbbá

$$A = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$$

és legyenek $x_k = \frac{a_k}{A}$. Ekkor az x_k számok számtani közepe 1, így

$$\prod_{k=1}^n x_k = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{A^n} \leq 1$$

azaz

$$\prod_{k=1}^n a_k \leq A^n = \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \right)^n$$

amiből kapjuk is a bizonyítandót.

Megjegyzés: Az adott a_i számok k -adik hatványközepe

$$c_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^k}{n} \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Belátható egyrészt az, hogyha $k_1 < k_2$, akkor

$$c_{k_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq c_{k_2}(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Másrészt határértékekkel belátható az is, hogy

$$c_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

Ez azért érdekes, mert $k = -1$ esetén a harmonikus közepet kapjuk, $k = 0$ esetén a mértani (geometriai) közepet, $k = 1$ esetén a számtani (aritmetikai) közepet, illetve $k = 2$ esetén a négyzetes (kvadratikus) közepet.

2. Sorozatok, végtelen sorok

2.1. Sorozat

Számsorozat egy olyan $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ hozzárendelés, mely $\forall n \in \mathbb{N}$ -hez hozzárendel egy $a_n \in \mathbb{R}$ számot. Ekkor a sorozatot (a_n) -el jelöljük.

2.2. Korlátos sorozat

Az (a_n) sorozat korlátos, hogyha $H = \{a_n\}$ korlátos.

2.3. Monoton sorozat

Az (a_n) sorozat monoton nő (csökken), ha $n < m$ esetén $a_n \leq a_m$ ($a_n \geq a_m$).

2.4. Konvergens sorozat

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén

$$|a_n - A| < \epsilon.$$

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

egyértelmű.

2.5. Divergens sorozat

Ha (a_n) nem konvergens, akkor divergens.

2.6. Végtelenbe divergálás

Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$$

ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez ($\forall k \in \mathbb{R}$ -hez) $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén $a_n > K$ ($a_n < k$).

2.7. Általános határérték

Általánosan mondhatjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

ha A tetszőleges U környezetéhez $\exists n_0$, melyre $\forall n > n_0$ esetén $a_n \in U$.

2.8. Tétel

Konvergens sorozat korlátos.

Bizonyítás

Rögzítsünk egy ϵ -t, és a hozzátartozó n_0 küszöbindexet. Legyen továbbá $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Ekkor az (a_n) sorozatnak az $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ intervallumon kívül véges sok eleme van, így ennek a véges sok elemnek létezik minimuma és maximuma, tehát létezik

$$m := \min\{a_n \mid n < n_0\} \quad M := \max\{a_n \mid n < n_0\}.$$

Ekkor felső korlátnak jó lesz $\max(M, A + \epsilon)$, alsó korlátnak pedig $\min(m, A - \epsilon)$.

2.9. Tétel

Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.

Bizonyítás

Legyen $H = \{a_n\}$ felülről (alulról) korlátos halmaz. Ekkor létezik $\sup(H) = A$ ($\inf(H) = A$). A monotonitás miatt ez azt jelenti, hogy $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $n > n_0$ esetén

$$\begin{aligned} A - \epsilon < a_n \leq A < A + \epsilon \\ \left(A - \epsilon < A \leq a_n < A + \epsilon \right) \end{aligned}$$

teljesül. Ekkor a határérték definíciójából $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

2.10. Határértékek tulajdonságai

1. Linearitás

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

3. Tegyük fel, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

4. Monotonitás

Legyen $a_n < b_n$ valamilyen küszöbindex után. Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

5. Rendőr-elv

Legyen $a_n < b_n < c_n$ valamilyen küszöbindex után. Legyen továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Bizonyítás

Legyen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

1. Legyen $\alpha \neq 0$ és $\beta \neq 0$. Legyen továbbá az (a_n) sorozatnál az $\frac{\epsilon}{2|\alpha|}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1 , a (b_n) sorozatnál az $\frac{\epsilon}{2|\beta|}$ számhoz tartozó küszöbindex pedig n_2 . Ekkor $n_0 := \max(n_1, n_2)$ mellett

$$\begin{aligned} |\alpha a_n + \beta b_n - (\alpha A + \beta B)| &\leq |\alpha a_n - \alpha A| + |\beta b_n - \beta B| = \\ &= |\alpha| |a_n - A| + |\beta| |b_n - B| < |\alpha| \cdot \frac{\epsilon}{2|\alpha|} + |\beta| \cdot \frac{\epsilon}{2|\beta|} = \epsilon. \end{aligned}$$

2. Legyen $A \neq 0$. Mivel a (b_n) sorozat konvergens, korlátos is, azaz $\exists K > 0$, melyre $|b_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Legyen továbbá az (a_n) sorozatnál az $\frac{\epsilon}{2K}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1 , a (b_n) sorozatnál az $\frac{\epsilon}{2|A|}$ számhoz tartozó küszöbindex pedig n_2 . Ekkor $n_0 := \max(n_1, n_2)$ mellett

$$\begin{aligned} |a_n b_n - (AB)| &= |(a_n - A)b_n + (b_n - B)A| = |a_n - A| |b_n| + |b_n - B| |A| < \\ &< \frac{\epsilon}{2K} \cdot K + \frac{\epsilon}{2|A|} \cdot |A| = \epsilon. \end{aligned}$$

3. Azt fogjuk belátni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B \neq 0$ mellett

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$

Legyen ugyanis a (b_n) sorozatnál az $\frac{|B|}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1 , az $\frac{\epsilon|B|^2}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex pedig n_2 . Ekkor $n_0 := \max(n_1, n_2)$ mellett

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \left| \frac{B - b_n}{b_n B} \right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n B|} < \frac{|b_n - B|}{\frac{|B|^2}{2}} < \frac{\frac{\epsilon|B|^2}{2}}{\frac{|B|^2}{2}} = \epsilon.$$

4. Triviális.

5. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = B$. Ekkor a határérték definíciójából valamilyen küszöbindex után

$$B - \epsilon < a_n < b_n < c_n < B + \epsilon.$$

2.11. Részsorozat

Adott az (a_n) sorozat, és az (n_k) végtelen index-sorozat, ahol $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $n_k \in \mathbb{N}$ teljesül, és $\forall k < j$ esetén $n_k < n_j$. Ekkor az (a_{n_k}) az (a_n) részsorozata.

2.12. Tétel

Ha (a_n) monoton, korlátos, vagy konvergens, akkor (a_{n_k}) is monoton, korlátos, vagy konvergens.

Bizonyítás

Triviális.

2.13. Csúcselem

Adott (a_n) sorozatban a_m csúcselem, ha $\forall n > m$ esetén $a_n \leq a_m$.

2.14. Tétel

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Legyen először az (a_n) sorozatnak végtelen sok csúcseleme. Ekkor legyen e csúcselemek indexe n_k ahol $n_i < n_j$ ha $i < j$. Ekkor az (a_{n_k}) sorozat monoton fogyó.

Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak csak véges sok csúcseleme van. Legyen ekkor az utolsó csúcs indexe n , és legyen $n_1 := n + 1$. Mivel a_{n_1} már nem lehet csúcs, ezért létezik nála nagyobb elem, legyen ez a_{n_2} . Mivel a_{n_2} sem csúcs, ennél is létezik nagyobb elem. Ezt a végtelenségig folytatva tudunk konstruálni egy (a_{n_k}) monoton növekvő sorozatot.

2.15. Bolzano-Weierstrass tétel

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás

Beláttuk, hogy korlátos sorozatnak létezik monoton részsorozata. Mivel ez a részsorozat korlátos és monoton, konvergens is.

2.16. Nullsorozat

Az (a_n) sorozat nullsorozat, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

2.17. Tétel

1. Látható, hogy (a_n) nullsorozat akkor és csak akkor, hogyha $(|a_n|)$ nullsorozat.

2. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

ha az $(a_n - A)$ sorozat nullsorozat.

3. Legyen (a_n) nullsorozat, és (b_n) korlátos sorozat. Ekkor $(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.

4. Legyen (a_n) és (b_n) nullsorozat, ekkor $(a_n \pm b_n)$ is nullsorozat. Legyen továbbá $c \in \mathbb{R}$, ekkor $(c \cdot a_n)$ is nullsorozat.

5. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{a_n}, & \text{ha } a_n > 0 \\ 0, & \text{ha } a_n \leq 0. \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, azaz (b_n) nullsorozat.

6. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és (b_n) alulról korlátos sorozat. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty.$$

Hasonlóan, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ és (b_n) felülről korlátos sorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = -\infty.$$

7. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n$ lehet 0, konstans, vagy $\pm\infty$.

2.18. Összehasonlító kritériumok

1. Legyen (a_n) nullsorozat és (b_n) egy olyan sorozat, melyre $|b_n| \leq |a_n|$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ (adott küszöbindex után). Ekkor (b_n) is nullsorozat.

2. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ és (b_n) egy olyan sorozat, melyre $b_n \geq a_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ (adott küszöbindex után). Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

2.19. Nagyságrendek

Belátható, hogy az alábbi sorrend áll fenn:

$$n^n \gg n! \gg k^n \gg n^k (\gg \log n)$$

Ez azt jelenti, hogy például

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} = \infty$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{k^n} = 0.$$

2.20. Cauchy kritérium

Azt mondjuk, hogy az (a_n) Cauchy sorozat, vagy teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n, m > n_0$ esetén

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

teljesül.

2.21. Tétel

Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, hogyha teljesíti a Cauchy kritériumot.

Bizonyítás

Legyen (a_n) konvergens. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor Cauchy sorozat.

Tudjuk, hogy valamilyen küszbindex után

$$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2} \quad |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \epsilon.$$

Legyen (a_n) Cauchy sorozat. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor konvergens.

Először lássuk be, hogy egy Cauchy sorozat korlátos!

Tudjuk, hogy valamilyen n_0 küszöbindex után $|a_n - a_m| < \epsilon$, azaz $a_n \in (a_m - \epsilon, a_m + \epsilon)$.

Ekkor ezen az intervallumon kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, azaz

$$K := \max\{|a_m| + \epsilon, |a_k| \mid k < n_0\}$$

jó korlát. Tehát az (a_n) Cauchy sorozat korlátos, emiatt van konvergens részsorozata.

Legyen a részsorozat (a_{n_k}) ahol $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

Tudjuk, hogy valamilyen küszöbindex után

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad |a_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

teljesül. Ekkor

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| = |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| \leq \epsilon.$$

2.22. Torlódási pont

Az adott (a_n) sorozatban $t \in \mathbb{R}$ torlódási pont, ha $\forall \epsilon > 0$ -ra a $(t - \epsilon, t + \epsilon)$ intervallum végtelen sok elemét tartalmazza az (a_n) sorozatnak.

2.23. Limesz inferior

Az (a_n) sorozat torlódási pontjainak infimuma a $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, vagy $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2.24. Limesz superior

Az (a_n) sorozat torlódási pontjainak szuprémuma a $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, vagy $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

2.25. Tétel

Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Ekkor az (a_n) sorozatnak az A az egyetlen torlódási pontja.

2.26. Tétel

Ha az (a_n) sorozatnak kettő, vagy több torlódási pontja van, akkor a sorozat divergens.

2.27. Számtani átlag sorozat

Adott (a_n) sorozat számtani átlag sorozata az

$$A_n := \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

2.28. Tétel

Ha (a_n) nullsorozat, akkor (A_n) is nullsorozat.

Bizonyítás

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|A_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Legyen az (a_n) sorozatnál az $\frac{\epsilon}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1 . Legyen továbbá a $n_2 = \frac{2n_1 K}{\epsilon}$ ahol $|a_n| \leq K$. Világos, hogy létezik ilyen K , hiszen a sorozat konvergens. Ekkor

$$|A_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1} |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_1+1}^n |a_k| \leq \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{n - n_1}{n_1} < \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\epsilon}{2}.$$

Világos, hogy $n \geq \max(n_1, n_2) = \max\left(n_1, \frac{2n_1 K}{\epsilon}\right)$ esetén

$$|A_n| < \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2.29. Tétel

Ha (a_n) konvergens, akkor (A_n) is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Bizonyítás

Felhasználva az előző tételt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.30. Végtelen sor

Adott egy (a_n) sorozat, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

egy végtelen sor.

2.31. N-edik részletösszeg

Egy végtelen sor n -edik részletösszege

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

ahol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ekkor a $(\sum a_n)$ sorozat konvergens, ha $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$. Azt mondjuk, hogy S a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor összege.

Ha (s_n) divergens, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor divergens.

2.32. Tétel

Ha $(\sum a_n)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.

Bizonyítás

Legyen $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$ és $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n = 0.$$

2.33. Divergencia-teszt

Ha (a_n) nem nullsorozat, akkor $(\sum a_n)$ divergens.

2.34. Mértani sor

Legyen $a_n = q^{n-1}$, ekkor $(\sum a_n)$ egy mértani sor.

2.35. Cauchy kritérium végtelen sorokra

Azt mondjuk, hogy a $(\sum a_n)$ végtelen sor teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > m \geq n_0$ esetén

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{i=m+1}^n a_i \right| < \epsilon.$$

2.36. Tétel

$(\sum a_n)$ akkor és csak akkor konvergens, hogyha teljesíti a Cauchy feltételt.

2.37. Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra

1. Majoráns kritérium

Adott két sor, melyekre $0 \leq b_n \leq a_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $(\sum a_n)$ konvergens. Ekkor $(\sum b_n)$ is konvergens.

2. Minoráns kritérium

Adott két sor melyekre $a_n \leq b_n$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

2.38. Abszolút konvergencia

Azt mondjuk, hogy a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens, ha $(\sum |a_n|)$ konvergens.

2.39. Tétel

Ha a $(\sum a_n)$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=m}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k|.$$

Mivel $(\sum a_n)$ abszolút konvergens,

$$\left| \sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=m}^n |a_k| \right| < \epsilon$$

azaz

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon$$

tehát $(\sum a_n)$ konvergens.

2.40. Feltételes konvergencia

Azt mondjuk, hogy a $(\sum a_n)$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2.41. Hányados-kritérium (d'Alembert féle)

1. Tegyük fel, hogy $\exists q < 1$, amire

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$$

teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| \leq q \quad \left| \frac{a_3}{a_2} \right| \leq q \quad \dots \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q.$$

Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_1} \right| \leq q^n \implies |a_{n+1}| \leq q^n |a_1|.$$

Ez azt jelenti, hogy a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.

2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.42. Gyenge hányados-kritérium

Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$$

határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a sor abszolút konvergens
2. ha $A > 1$, akkor a sor divergens
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás

1. Legyen az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozatnál az $\frac{1-A}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_0 . Ekkor

$$\left| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| - A \right| < \frac{1-A}{2} \implies \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < A + \frac{1-A}{2} = \frac{1+A}{2} < 1$$

így a hányados-kritérium miatt a sor abszolút konvergens.

2. Triviális.
3. Jó példa a $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ és a $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ sorozatok.

2.43. Gyökkritérium (Cauchy féle)

1. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < q < 1 \in \mathbb{R}$, melyre $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor abszolút konvergens.
2. Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor a $\left(\sum a_n\right)$ sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$|a_n| \leq q^n < 1$$

azaz a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.

2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.44. Gyenge gyökkritérium

Tegyük fel, hogy létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$$

határérték. Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens
2. ha $A > 1$, akkor a $(\sum a_n)$ sor divergens
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás

1. Legyen az $(\sqrt[n]{|a_n|})$ sorozatnál az $\frac{1-A}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_0 . Ekkor

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - A \right| < \frac{1-A}{2} \implies \sqrt[n]{|a_n|} < A + \frac{1-A}{2} < 1$$

így a gyökkritérium miatt a sor abszolút konvergens.

2. Triviális.
3. Jó példa a $(\sum \frac{1}{n})$ és a $(\sum \frac{1}{n^2})$ sorozatok.

2.45. Leibniz-típusú sor

Azt mondjuk, hogy $(\sum a_n)$ Leibniz-típusú sor, ha az (a_n) sorozatra

1. oszcilláló sorozat, azaz $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
2. $(|a_n|)$ monoton fogyó
3. (a_n) nullsorozat.

2.46. Tétel

A Leibniz-típusú sorok konvergenssek.

Bizonyítás

Legyen $a_1 > 0$. Ekkor a páratlan indexű tagok pozitívak, a páros indexű tagok pedig negatívak. Legyen továbbá

$$\alpha_k := \sum_{i=1}^{2k} a_i$$

$$\beta_k := \sum_{i=1}^{2k-1} a_i$$

$$I_k := [\alpha_k, \beta_k].$$

Ekkor az I_k intervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2.47. Tétel

Ha a $(\sum a_n)$ abszolút konvergens, akkor a sor összege független a sorrendtől.

2.48. Riemann tétel

Ha a $(\sum a_n)$ feltételesen konvergens, akkor $\forall c \in \mathbb{R}$ -hez létezik olyan átrendezés, amikor a sor összege c -vel egyenlő.

3. Valós függvények

3.1. Függvény

Adott az $f : X \mapsto Y$ leképezés, mely során $\forall x \in X$ elemhez hozzárendelünk egy $y \in Y$ elemet. Ekkor ezt a leképezést függvénynek nevezzük.

3.2. Értelmezési tartomány

Egy függvény értelmezési tartományát D_f -el jelöljük.

3.3. Értékkészlet

Egy függvény értékkészletét R_f -el jelöljük.

3.4. Injektív függvény

Adott f függvény injektív, ha $\forall x_1 \neq x_2 \in D_f$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$ teljesül.

3.5. Szürjektív függvény

Adott f függvény szürjektív, ha $\forall y \in R_f$ -hez $\exists x \in X$, amire $f(x) = y$.

3.6. Bijektív függvény

Adott f függvény bijektív, ha injektív és szürjektív.

3.7. Inverz függvény

Adott egy $f : X \mapsto Y$ bijekció. Ekkor az f függvény inverze egy olyan $f^{-1} : Y \mapsto X$ bijekció, melyre $f^{-1}(f(x)) = x$.

3.8. Tétel

f invertálható akkor és csak akkor, ha szigorúan monoton.

3.9. Függvénykompozíció

Adott $f : X \mapsto Y$ és $g : Y \mapsto Z$. Ekkor a két függvény kompozíciója

$$h = g \circ f = g(f) : X \mapsto Z.$$

3.10. Folytonosság pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Megjegyzés: Egy másik megfogalmazás, hogy adott f függvény folytonos az x_0 pontban, ha $f(x_0) \in U_{f(x_0)} \subset \mathbb{R}$ környezetére $\exists U_{x_0} \subset \mathbb{R}$ környezet, melyre $\forall x_1 \in U_{x_0}$ esetén

$$f(x_1) \in U_{f(x_0)}.$$

3.11. Sorozatfolytonosság pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (x_n) \subset X$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

teljesül.

3.12. Tétel

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban akkor és csak akkor, ha f sorozatfolytonos az $x_0 \in D_f$ pontban.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban. Legyen továbbá $(x_n) \subset D_f$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Ekkor $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Mivel $x_n \rightarrow x_0$, valamilyen küszöbindex után

$$|x_n - x_0| < \delta \implies |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Tehát valóban $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Most tegyük fel, hogy f sorozatfolytonos az x_0 pontban, azonban nem folytonos, tehát $\exists \epsilon > 0$, melyre $\forall \delta > 0$ -hoz $\exists x$, melyre $|x - x_0| < \delta$, de $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{1}{n}$ -hez is $\exists x_n$, melyre $|x_n - x_0| < \delta$, mégis $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Ekkor erre az (x_n) sorozatra $x_n \rightarrow x_0$, de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(x_0)$, ami ellentmondás, hiszen f sorozatfolytonos x_0 -ban. Tehát f folytonos is x_0 -ban.

3.13. Folytonosság intervallumon

Azt mondjuk, hogy az $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos adott $Y \subset D_f$ intervallumon folytonos, ha $\forall x_0 \in Y$ pontban folytonos.

Ha $D_f = [a, b]$, akkor f folytonos D_f -en, ha $\forall x_0 \in (a, b)$ pontban folytonos, és

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b).$$

3.14. Folytonosság tulajdonságai

1. Legyen $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és legyen f és g folytonos az x_0 pontban, ahol $g(x_0) \neq 0$. Ekkor $f \pm g, f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ folytonos x_0 -ban.
2. Legyen f folytonos x_0 -ban, és g folytonos $f(x_0)$ -ban. Ekkor $g \circ f$ folytonos x_0 -ban.

3.15. Függvények határértéke

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy x_0 olyan $U_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezete, amire

$$U_{x_0} \setminus \{x_0\} \subset D$$

teljesül. Ha $x_0 = \pm\infty$, akkor legyen $U_{x_0} = (a, \infty)$, illetve $U_{x_0} = (-\infty, a)$.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

teljesül.

- (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists \delta > 0$, melyre $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén

$$f(x) > K$$

teljesül.

- (c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ha $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez $\exists \delta > 0$, melyre $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén

$$f(x) < k$$

teljesül.

2. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L$ esetén

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

teljesül.

- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L$ esetén

$$f(x) > K$$

teljesül.

- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ ha $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L$ esetén

$$f(x) < k$$

teljesül.

3. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$ ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists l \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x < l$ esetén

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

teljesül.

- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists l \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x < l$ esetén

$$f(x) > K$$

teljesül.

- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ha $\forall k \in \mathbb{R}$ -hez $\exists l \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x < l$ esetén

$$f(x) < k$$

teljesül.

Megjegyzés: Mindegyik fenti definíciót ki lehet mondani környezetek segítségével is.

3.16. Átviteli elv függvények határértékére

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy x_0 olyan $U_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezete, amire

$$U_{x_0} \setminus \{x_0\} \subset D$$

teljesül. Ha $x_0 = \pm\infty$, akkor legyen $U_{x_0} = (a, \infty)$, illetve $U_{x_0} = (-\infty, a)$.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

teljesül.

- (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

teljesül.

- (c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

teljesül.

2. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

teljesül.

- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

teljesül.

- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

teljesül.

3. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

teljesül.

- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$$

teljesül.

- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

teljesül.

3.17. Egyoldali határérték

Adott az $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0} = (x_0 - r, x_0) \subset D$ ($\exists U_{x_0} = (x_0, x_0 + r) \subset D$). Ekkor f baloldali (jobboldali) határértéke az x_0 pontban α , azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha \right)$$

ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$) esetén

$$|f(x) - \alpha| < \epsilon$$

teljesül.

Megjegyzés: Egy másik jelölés az egyoldali határértékre

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$$

illetve

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0).$$

3.18. Tétel

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha.$$

3.19. Átviteli elv egyoldali határértékekre

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha$) akkor és csak akkor, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra, ahol $x_n < x_0$ ($x_n > x_0$) és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$$

teljesül.

3.20. Szakadások

1. Az f függvénynek elsőfajú szakadása van x_0 -ban, ha léteznek a

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) < \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < \infty$$

határértékek. Ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

akkor megszüntethető a szakadás.

2. Az f függvénynek másodfajú szakadása van x_0 -ban, ha nem elsőfajú a szakadás.

3.21. Tétel

Ha f folytonos $x_0 \in \text{int}(D)$ -ben, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.22. Határértékek tulajdonságai

1. Linearitás

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha \cdot f(x) + \beta g(x)) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \beta \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

3. Kompozíció határértéke

Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ és $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \beta$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \beta.$$

4. Monotonitás

Legyen $f(x) < g(x) \forall x \neq x_0$ -ra. Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

5. Rendőr-elv

Legyen $f : D_f \mapsto \mathbb{R}$, $g : D_g \mapsto \mathbb{R}$ és $h : D_h \mapsto \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0}$, amire $\forall x \neq x_0 \in U_{x_0}$ esetén

$$f(x) < g(x) < h(x).$$

Ekkor ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x).$$

6. Monoton függvények határértéke

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, amire tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0}$ környezet, ahol a függvény monoton nő (csökken), azaz $\forall x_1 < x_2 \in U_{x_0}$, ahol $x_1 \neq x_0$ és $x_2 \neq x_0$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Ekkor $\exists f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$, ahol

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \inf \{f(x) | x > x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \sup \{f(x) | x < x_0\}$$

(illetve

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \sup \{f(x) | x > x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \inf \{f(x) | x < x_0\}.)$$

3.23. Darboux-tulajdonság

Egy f függvény Darboux-tulajdonságú, ha bármely két függvényértéke között minden értéket felvesz. Tehát az $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény Darboux-tulajdonságú, ha $\forall a < b \in D$ és $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$) esetén $\forall c \in [f(a), f(b)]$ -hez ($\forall c \in [f(b), f(a)]$) $\exists \xi \in [a, b]$, melyre $f(\xi) = c$.

3.24. Tétel

Darboux-tulajdonságú szigorúan monoton függvény folytonos.

Bizonyítás

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény, mely teljesíti a Darboux feltételt. Legyen $x_0 \in (a, b)$ és $\epsilon > 0$ tetszőleges. Legyen továbbá

$$f(\xi_2) = \min(f(x_0) + \epsilon, f(b))$$

és

$$f(\xi_1) = \max(f(x_0) - \epsilon, f(a)).$$

Ekkor

$$\delta = \min(x_0 - \xi_1, \xi_2 - x_0)$$

választással $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

teljesül.

3.25. Bolzano-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$. Ekkor $\exists \xi \in [a, b]$, amire $f(\xi) = 0$.

Tehát zárt intervallumon folytonos függvénynek, amelyik pozitív és negatív értékeket is fölvesz, van zérushelye.

Bizonyítás

Legyen $c_1 := \frac{a+b}{2}$. Legyen továbbá

$$a_2 := a_1 \quad b_2 := c_1$$

ha $f(c_1) > 0$, és

$$a_2 := c_1 \quad b_2 := b_1$$

ha $f(c_2) > 0$. Hasonlóan konstruáljuk az $I_k := [a_k, b_k]$ intervallumsorozatot. Nyilván az I_k intervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közöspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi).$$

Mivel $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$ ezért $f(\xi) \leq 0 \leq f(\xi)$. Emiatt nyilván $f(\xi) = 0$.

3.26. Bolzano-Darboux-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $f(a) < f(b)$. Ekkor $\forall c \in [f(a), f(b)]$ -hez $\exists \xi \in [a, b]$, amire $f(\xi) = c$.

Úgy is kimondhatjuk a tételt, hogy minden folytonos függvény Darboux-tulajdonságú.

Bizonyítás

Az előző tételből triviális.

3.27. Darboux-tétel

Ha f differenciálható, akkor f' Darboux-tulajdonságú.

Bizonyítás

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $f'(a) < c < f'(b)$.

Legyen továbbá

$$F(x) = f(x) - cx.$$

Ekkor nyilván

$$F'(x) = f'(x) - c$$

azaz

$$F'(a) < 0 \quad F'(b) > 0.$$

Ekkor a Bolzano-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b)$ amire $F'(\xi) = 0$, azaz $f'(\xi) = c$.

3.28. Weierstrass tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor R_f korlátos és zárt.

Megjegyzés: Szoktuk ezt külön is megfogalmazni, az első tétel azt mondja ki, hogy R_f korlátos, a másik pedig azt, hogy felveszi a szélsőértékeit.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n$ -hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre $f(x_n) > n$. Ez az (x_n) sorozat korlátos, hiszen $a \leq x_n \leq b$, így a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata, melyre

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Mivel a függvény folytonos, sorozatfolytonos is, tehát

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Azonban ez ellentmondás, hiszen $f(x_{n_k}) > n_k$. Tehát valóban korlátos.
 Legyen $\beta = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Ekkor nyilván $\forall n$ -hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta.$$

Azonban a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, amelyre

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Azonban a sorozatfolytonosság miatt

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Tehát $\beta = f(\xi)$, azaz $\beta = \max \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

3.29. Nevezetes határértékek

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

Megjegyzés: A logaritmus alapja itt nem releváns.

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$$

3.30. Egyenletes folytonosság

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos D -ben, ha $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta$, ami ϵ -ra jellemző, melyre $\forall x_1, x_2 \in D$ -re $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

teljesül.

3.31. Tétel

Ha f egyenletesen folytonos, akkor folytonos is.

3.32. Heine-tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f folytonos, de nem egyenletesen folytonos, azaz $\exists \epsilon > 0$, melyre $\forall \delta > 0$ -hoz $\exists x, y \in [a, b]$, melyekre $|x - y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

teljesül. Legyenek a $\delta = \frac{1}{n}$ -hez tartozó számok x_n és y_n . Ezek a sorozatok nyilván korlátosak, tehát a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k}), (y_{n_k})$ konvergens részsorozataik, amikre

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$$

és

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0.$$

Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, nyilván $x_0 = y_0$. A sorozatfolytonosság miatt

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(y_{n_k})$$

tehát

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \epsilon$$

ami ellentmondás. Tehát valóban egyenletesen folytonos a függvény.

3.33. Lipschitz-folytonosság

Adott f Lipschitz-folytonos D_f -en, ha $\exists L > 0$, amire $\forall x_1, x_2 \in D_f$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

teljesül.

3.34. Tétel

Ha f Lipschitz-folytonos, akkor folytonos is.

3.35. Differenciahányados

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \text{int}(D)$. Ekkor az $x \in D_f$ ponthoz tartozó differenciahányados

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3.36. Differenciálhányados

Azt mondjuk f differenciálható x_0 -ban, ha létezik

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

azaz létezik és véges a differenciálhányados.

3.37. Egyoldali derivált

Adott f jobboldali (baloldali) deriváltja az x_0 pontban

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$\left(f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right).$$

3.38. Tétel

Adott f függvény differenciálható x_0 -ban akkor és csak akkor, ha

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

3.39. Differenciálhatóság intervallumon

Azt mondjuk, hogy $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható, hogy $\forall x_0 \in (a, b)$ differenciálható és

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

3.40. Tétel

Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor folytonos x_0 -ban.

Bizonyítás

f differenciálhatósága azt jelenti, hogy

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

azaz $\forall \epsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$f'(x_0) - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) + \epsilon.$$

Ekkor

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq K$$

ahol

$$K = \max \{ |f'(x_0) - \epsilon|, |f'(x_0) + \epsilon| \}.$$

Ekkor nyilván

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|.$$

Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{\epsilon}{K}$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| < K \cdot \frac{\epsilon}{K} = \epsilon$$

tehát valóban folytonos.

3.41. Differenciálási szabályok

Legyenek f és g differenciálható függvények.

1. Linearitás

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

2. Szorzat deriváltja

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

3. Reciprok deriváltja

Legyen $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

4. Hányados deriváltja

Legyen $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

5. Kompozíció deriváltja

Legyen f differenciálható $g(x)$ -ben.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

6. Inverz deriváltja

Legyen f szigorúan monoton, és legyen $f'(x) \neq 0$.

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3.42. Lokális szélsőérték

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $x_0 \in \text{int}(D)$ lokális maximum (minimum), ha $\exists U_{x_0}$ amire $\forall x \in U_{x_0}$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0) \\ \left(f(x) &\geq f(x_0) \right) \end{aligned}$$

teljesül.

3.43. Globális szélsőérték

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $x_0 \in D$ globális maximum (minimum), ha $\forall x \in D$ esetén

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(x_0) \\ \left(f(x) &\geq f(x_0) \right) \end{aligned}$$

teljesül.

3.44. Tétel

Ha f -nek lokális szélsőértéke van $x_0 \in \text{int}(D_f)$ -ben, akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

3.45. Középérték tételek

1. Rolle-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b) -n differenciálható függvény, ahol $f(a) = f(b)$.
Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$f'(\xi) = 0.$$

2. Lagrange-féle középérték-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b) -n differenciálható függvény. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. Cauchy-féle középérték-tétel

Legyen $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b) -n differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $g(a) \neq g(b)$ és $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

3.46. Tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, melyre $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor $f(x)$ konstans függvény.

3.47. Integrálszámítás első alaptétele

Adottak $g, f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények, melyekre $f'(x) = g'(x) \ \forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor

$$f(x) = g(x) + c.$$

3.48. L'Hospital-szabály

Adott $g, f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálhatóak az $x_0 \in \text{int}(I)$ pont egy U_{x_0} környezetében. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (\text{vagy } \pm \infty).$$

Ekkor ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3.49. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor f monoton növény (csökkenő) $I \subset D$ -ben akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in I$ esetén.

3.50. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és legyen $f'(x_0) = 0$ valamilyen x_0 -ra. Ekkor x_0 lokális szélsőérték, ha $f''(x_0) \neq 0$. Továbbá x_0 lokális maximum (minimum), ha $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált x_0 -ban, akkor x_0 lokális szélsőérték.

3.51. Konvexitás

Egy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény $(a, b) \subset D$ -ben konvex (konkáv), ha $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$ és $\forall t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

teljesül. Egy f függvény konkáv, ha $-f$ konvex.

3.52. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor f konvex (konkáv) $I \subset D$ -ben akkor és csak akkor, ha $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in D$ esetén.

3.53. Inflexiós pont

Az $x_0 \in D_f$ inflexiós pont, ha itt a függvény konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe vált.

3.54. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, és legyen $f''(x_0) = 0$ valamilyen x_0 -ra. Ekkor x_0 inflexiós pont, ha $f'''(x_0) \neq 0$.

Ha $f''(x_0) = 0$ és $f''(x)$ előjelet vált x_0 -ban, akkor x_0 inflexiós pont.

3.55. Elsőfokú Taylor-polinom

Legyen az f függvény az $x_0 \in D_f$ -ben differenciálható. Ekkor

$$T_1^{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

az f x_0 -hoz tartozó elsőfokú Taylor-polinomja.

3.56. Tétel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0$$

3.57. Tétel

Legyen f kétszer differenciálható függvény egy $x_0 \in D_f$ pont U_{x_0} környezetében. Ekkor $\forall x \in U_{x_0}$ -hoz $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

3.58. Taylor-polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban. Ekkor

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

az f függvény x_0 -hoz tartozó n -edik Taylor-polinomja.

3.59. Tétel

Pontosan egy olyan $P_n(x)$ polinom létezik, amire

$$P_n^{(k)}(x_0) = f_n^{(k)}(x_0)$$

ha $k \leq n$ és

$$P_n^{(n+1)}(x_0) = 0$$

ez a polinom pedig $T_n(x)$.

3.60. Lagrange-féle maradéktag

Az $L_n(x) := f(x) - T_n(x)$ a Lagrange-féle maradéktag.

3.61. Tétel

Legyen f $(n+1)$ -szer differenciálható x_0 egy U_{x_0} környezetében. Ekkor $\forall x \in U_{x_0}$ -hoz $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

4. Integrálszámítás

4.1. Primitív függvény

Adott egy $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$. Ekkor az $F : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény az f primitív függvénye, ha $\forall x \in I$ esetén

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül.

4.2. Tétel

Ha F és G az f függvény primitív függvényei, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$ konstans, amire

$$F(x) = G(x) + c$$

teljesül.

4.3. Határozatlan integrál

Az $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmaza az f határozatlan integrálja,

$$\int f(x)dx = \{F : I \mapsto \mathbb{R} \mid F'(x) = f(x)\}.$$

4.4. Határozatlan integrál tulajdonságai

1.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

2.

$$\int f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = f(\varphi(x)) + c$$

3.

$$\int f(x)^\alpha \cdot f'(x)dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$$

4.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln |f(x)| + c \left(= \begin{cases} \ln(f(x)), & \text{ha } f(x) > 0 \\ \ln(-f(x)), & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases} \right)$$

5.

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

4.5. Felosztás

Adott $[a, b]$ intervallum egy felosztása az

$$\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Az összes lehetséges felosztás halmaza $\mathbb{F}$.

4.6. Felosztás finomsága

Adott $[a, b]$ intervallum $\mathcal{F}$ felosztás finomsága

$$\delta(\mathcal{F}) = \max\{x_k - x_{k-1}\}.$$

4.7. Alsó közelítő összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, és legyen

$$m_k = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg

$$s(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k.$$

4.8. Felső közelítő összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Legyen $\mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy felosztása, és legyen

$$M_k = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Ekkor a felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg

$$S(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k.$$

4.9. Tétel

1. Tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztás esetén

$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}).$$

2. Új osztópont felvételekor az alsó közelítő összeg nem csökken, a felső közelítő összeg pedig nem nő. Legyen tehát az $\mathcal{F}$ felosztásból egy osztópont felvételével képzett felosztás $\mathcal{F}'$. Ekkor

$$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}).$$

3. Legyen $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ két felosztás. Ekkor

$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}').$$

4.10. Riemann-integrál

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha

$$\sup \{s(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\} = \inf \{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \sup \{s(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\} = \inf \{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

4.11. Oszcillációs összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ egy $\mathcal{F}$ felosztása. Ekkor a felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

4.12. Riemann-összeg

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ egy $\mathcal{F}$ felosztása. Ekkor a felosztáshoz tartozó egyik Riemann-összeg

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

ahol $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

4.13. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható akkor és csak akkor, ha $\forall(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{F}_n) = 0$$

esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} o(\mathcal{F}_n) = 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s(\mathcal{F}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{F}_n) \right)$$

teljesül.

4.14. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható akkor és csak akkor, ha $\forall(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(\mathcal{F}_n) = 0$$

esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \int_a^b f(x)dx$$

teljesül.

4.15. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható.

4.16. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos, és véges sok szakadási helytől eltekintve folytonos függvény integrálható.

4.17. Newton-Leibniz-formula

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen f egy primitív függvénye F . Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b.$$